Matematica generale: esercizi sulla barriera, 16 maggio 2012, con errore spiegato

Di seguito, vengono dati 27 insiemi, etichettati con $A_1, \dots, A_9, B_1, \dots, B_9, C_1, \dots, C_9$. Si ricorda che la notazione $\mathrm{I}(x_0, r)$ indica l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$.

1. $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 2 < |x+1|\}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : |2(x+1) - 3(x-1)| > (x+1)^2 - x(x+2) + 6\}$, $C_1 = \mathrm{I}(-1, 4)$.
2. $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > |x-3| + |x|\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < -1\}$, $C_2 = \mathrm{I}(1, 4)$.
3. $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| + |x-1| = 100\}$, $B_3 = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| > 2\}$, $C_3 = \mathrm{I}(-50, 4)$.
4. $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : |2x+5| > x-2\}$, $B_4 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - |x+3| + 1 > 0\}$, $C_4 = \mathrm{I}(4, 1)$.
5. $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : |(x+1)^2 - x(x+4)| > 3(x+1) - 2\}$, $B_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 5\}$, $C_5 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R}\}$.
6. $A_6 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > x - 3\}$, $B_6 = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 > x - 2\}$, $C_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2-1} \in \mathbb{R}\}$.
7. $A_7 = \{x \in \mathbb{R} : |3-x| + |x| \geq 2x - 1\}$, $B_7 = \{x \in \mathbb{R} : |-x-1| < 5\}$, $C_7 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[15]{x^2-1} \in \mathbb{R}\}$.
8. $A_8 = \{x \in \mathbb{R} : |x^{1027} - 5x^{\sqrt{\pi}} + 151| \leq -17\}$, $B_8 = \{x \in \mathbb{R} : |4-x| \leq 8\}$, $C_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[18]{x^2-1} \in \mathbb{R}\}$.
9. $A_9 = \{x \in \mathbb{R} : |x^{1028} + 5x^2 + 151| \geq -17\}$, $B_9 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$, $C_9 = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2-1) \in \mathbb{R}\}$.

Presi 2 qualunque di questi insiemi, determinarne l'unione e l'intersezione, e dire se uno è contenuto nell'altro.
Esempio giusto.
Prendiamo gli insiemi B_3 e C_2. Abbiamo:

$$\begin{aligned} B_3 = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| > 2\} &= \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x < -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} \\ &= (-\infty, -1/2) \cup (3/2, +\infty), \\ C_2 = \mathrm{I}(1,4) = (1-4, 1+4) &= (-3, 5). \end{aligned}$$

Quindi:

- $B_3 \not\subseteq C_2$ (perché $6 \in B_3$, ma $6 \notin C_2$).
- $C_2 \not\subseteq B_3$ (perché $0 \in C_2$, ma $0 \notin B_3$).
- $B_3 \cup C_2 = (-\infty, +\infty)$.
- $B_3 \cap C_2 = (-3, -1/2) \cup (3/2, 5)$.

Esempio sbagliato. Trovare l'errore.
Prendiamo gli insiemi B_3 e C_4. Abbiamo:

$$\begin{aligned} B_3 = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| > 2\} &= \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x < -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} \\ &= (-\infty, -1/2) \cup (3/2, +\infty), \\ C_4 = \mathrm{I}(4,1) = (4-1, 4+1) &= (3, 5). \end{aligned}$$

Quindi:

- $B_3 \not\subseteq C_4$ (perché $6 \in B_3$, ma $6 \notin C_4$).
- $C_4 \subseteq B_3$ (perché $4 \in C_4$, e anche $4 \in B_3$). È vero che $4 \in C_4$, ed è anche vero che $4 \in B_3$, ma *tutto questo non basta a stabilire che* $C_4 \subseteq B_3$. Per esempio, anche nell'esercizio precedente avevamo $4 \in C_2$ e $4 \in B_3$, ma non era vero che $C_2 \subseteq B_3$! Perché? Semplice: un insieme è contenuto nell'altro quando *tutti* gli elementi del primo sono anche elementi del secondo, e non quando ci sono solo alcuni elementi del primo che sono anche elementi del secondo! In questo esercizio C_4 è contenuto in B_3, ma la motivazione data è completamente sbagliata, quindi questo svolgimento *non passerebbe la barriera*! Una motivazione corretta che si può dare è per via grafica: si evidenziano entrambi gli insiemi sulla stessa retta reale, e si osserva che C_4 è interamente all'interno di B_3.
- $B_3 \cup C_4 = B_3$.
- $B_3 \cap C_4 = C_4$.